

سراسری 95: از بین مجموعه اعداد متوالی $\{300, \dots, 51, 52\}$ عددی به تصادف انتخاب میکنیم با کدام احتمال این عدد بر 6 یا 7 بخش پذیر است ولی مضرب 42 نیست؟

(سراسری 96): ظرف A شامل 5 مهره با شماره های یک رقمی فرد و ظرف B دارای 4 مهره با شماره های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم با کدام احتمال حاصلضرب آنها از 10 بیشتر است؟

(سراسری 96): سه نفر مشغول رمزگشایی یک پیام هستند. احتمال موفقیت آنها به ترتیب $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ و $\frac{1}{2}$ است با کدام احتمال لااقل یکی از آنان موفق میشود؟

احتمال در فضای نمونه‌ای غیر هم شانس:

برای بدست آوردن احتمال غیر هم شانس ابتدا احتمال تمامی پیشامدها را بر حسب پیشامد خواسته شده یا پیشامد با کمترین احتمال نوشته و سپس از اصل $P(S) = 1$ برای بدست آوردن احتمال پیشامد خواسته شده استفاده می‌نماییم. بدین ترتیب که مجموع احتمال تمامی پیشامدها را برابر یک قرار می‌دهیم.

مثال: دو مرد و سه زن در یک مسابقه شرکت می‌کنند. اگر افراد هم‌جنس در برنده شدن در مسابقه هم‌شانس باشند و احتمال برنده شدن هر مرد 2 برابر احتمال برنده شدن هر زن باشد. احتمال آنکه برنده مسابقه از میان زنان باشد را بیابید؟

مثال: تاسی چنان ساخته شده است که احتمال وقوع هر یک از وجوه آن متناسب با عددی است که بر روی آن وجه حک شده است. احتمال رو شدن عددی اول را بیابید؟

مثال: در یک آزمایش تصادفی فضای نمونه‌ای $S = \{a, b, c\}$ و $P(a) = 3P(b) = \frac{3}{2}P(c)$ احتمال

وقوع پیشامد $\{b, c\}$ را بیابید؟

احتمال شرطی:

احتمال وقوع پیشامد A به شرط آنکه بدانیم B به وقوع پیوسته است را احتمال وقوع A به شرط B می‌گویند و آن را با $P(A/B)$ نمایش می‌دهند. به عبارتی $P(A/B)$ یعنی احتمال وقوع A به شرط آنکه بدانیم B اتفاق افتاده است.

اگر A و B دو پیشامد دلخواه باشند. با توجه به نمودار ون داریم که $P(A/B)$ به این معنا است که باید احتمال وقوع پیشامد A را به شرط آنکه B اتفاق افتاده باشد را بیابیم. بنابراین چون پیشامد B به وقوع پیوسته است پس فضای نمونه‌ای دیگر S نیست و پیشامد B است. بنابراین داریم:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

مثال: در پرتاب یک تاس می‌دانیم عدد رو شده فرد است. احتمال اینکه این عدد اول باشد را بیابید؟

مثال: اگر $P(A) = \frac{1}{4}$ و $P(B) = \frac{1}{6}$ و $P(A/B) = \frac{1}{3}$ باشد، $P(A \cup B)$ را بیابید؟

(آزاد 87) در پرتاب دو تاس اگر مجموع دو تاس بزرگتر از 7 باشد چقدر احتمال دارد هر دو تاس مساوی باشند؟

مثال: تاسی را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم. اگر مجموع اعداد رو شده در سه پرتاب 7 باشد، احتمال آنکه فقط یکی از آنها 3 باشد را بیابید؟

مثال: یک فضای نمونه‌ای متشکل از 5 برآمد E, D, C, B, A است. اگر $P(\{A, B, C\}) = \frac{1}{3}$ و

$P(A) = \frac{1}{5}$ حاصل $P(\{B, c, d\} / \{A, B, c\})$ را بیابید؟

(آزاد 81) در پرتاب دو تاس قرمز و آبی، عدد تاس قرمز بزرگتر از آبی ظاهر شده است. احتمال اینکه مجموع دو تاس 6 باشد را بیابید؟

مثال: در خانواده‌ای که دارای سه فرزند است می‌دانیم که فرزند سوم دختر است. احتمال آنکه هر سه فرزند خانواده دختر باشد را بیابید؟

مثال: دو تاس را می‌اندازیم. اگر مجموع اعداد رو شده 7 باشد احتمال اینکه حداقل یکی از آنها 5 باشد را بیابید؟

مثال: دو تاس را می‌ریزیم اگر بدانیم مجموع دو عدد رو شده کمتر از 8 باشد. احتمال اینکه اعداد رو شده مثل هم باشند را بیابید؟

مثال: تاسی را سه بار می‌اندازیم اگر بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر 15 است، احتمال این را بیابید که هر سه دفعه اعداد یکسان رو شده باشد؟

(سراسری 91) دو تاس همگن را انداخته ایم اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از 6 باشد احتمال آنکه شماره یکی از تاسهای رو شده 2 باشد را بیابید؟

(سراسری 92) پنج مهره ی سفید با شماره های 1 تا 5 و همچنین پنج مهره سیاه با شماره های 1 تا 5 یکسان را در ظرفی قرار می دهیم. به تصادف دو مهره از بین آنها بیرون می آوریم. اگر مجموع شماره های هر دو مهره 6 باشد، با کدام احتمال هر دو مهره هم‌رنگ هستند؟

مثال: در پرتاب دو تاس اگر حاصلضرب اعداد رو شده مربع کامل نباشد احتمال اینکه عدد یکی از تاس ها دو برابر عدد تاس دیگر باشد کدام است؟

با توجه به احتمال شرطی داریم:

نکته

$$\text{الف) } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B / A)$$

$$\text{ب) } P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B / A) \cdot P(C / A \cap B)$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند آنگاه داریم:

نکته

$$P(A / B) = P(A) \rightarrow P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A) \rightarrow$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند آنگاه

نکته

$$P(A / B) = 0$$

اثبات: چون $P(A \cap B) = 0$ است بنابراین $P(A / B) = 0$ است.

مثال: کیسه‌ای شامل 5 مهره آبی و 4 مهره قرمز است. مهره‌ها را به طور متوالی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه اولی قرمز و دو تای دیگر آبی باشد را بیابید؟

مثال: برای دو پیشامد مستقل A و B داریم $3P(A \cap B') = P(A)$ و $P(A/B) = \frac{1}{5}$ مقدار

$P(A \cup B)$ را بیابید؟

(سراسری 90) اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه ای S باشند بطوریکه $P(A) = .2$ و

$P(B) = .22$ و $P(B/A) = .7$ آنگاه $P(B'/A')$ را بیابید؟

(سراسری 96) یک فضای نمونه ای متشکل از 5 برآمد a, b, c, d, e می باشند اگر $P(a) = \frac{1}{4}$ و

$P(\{a, b, c\}) = \frac{2}{3}$ باشد آنگاه $P(\{b, c, e\} / \{a, b, c\})$ را بیابید؟

مثال: کیسه‌ای شامل 7 مهره سفید و 5 مهره سیاه می‌باشد متوالیاً و بدون جایگذاری از این کیسه

مهره خارج می‌کنیم. احتمال آنکه اولین مهره سیاه در استخراج سوم بیرون بیاید را بیابید؟

مثال: مثال بالا را برای حالت با جایگذاری حل کنید؟

مثال: می‌دانیم در ماه اردیبهشت هوا 9 روز بارانی خواهد بود. احتمال اینکه در روز اول و دوم اردیبهشت هوا بارانی باشد را بیابید؟

مثال: در کیسه‌ای 5 مهره سفید و 7 مهره سیاه وجود دارد. مهره‌ها را متوالیاً و بدون جایگذاری خارج می‌کنیم (الف) احتمال اینکه از بین مهره‌های اول و دوم و سوم و چهارم دقیقاً یک مهره سفید باشد را بیابید؟

(ب) احتمال اینکه از بین مهره‌های اول و سوم و پنجم حداقل یک مهره سفید باشد را بیابید؟

(ج) احتمال اینکه مهره سوم و پنجم سیاه و مهره چهارم سفید باشد را بیابید؟

مثال: دو عدد به طور متوالی و بدون جایگذاری از میان اعداد 1، 2 و ... و 9 انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عدد دوم 5 باشد را بیابید؟

نکته

چون عدد اول مشخص نیست بنابراین انتخاب عدد دوم مستقل از انتخاب اول است.

مثال: در جعبه‌ای 5 مهره سفید و 7 مهره سیاه وجود دارد. مهره‌ها را متوالی و بدون جایگذاری بیرون می‌کشیم. احتمال آنکه مهره سوم سیاه باشد را بیابید؟

سراسری 95: در جعبه‌ای 8 لامپ موجود است که دو تای آن معیوب است به تصادف متوالیاً این لامپ‌ها را آزمایش کرده و لامپ سالم را کنار می‌گذاریم تا اولین لامپ معیوب پیدا شود با کدام احتمال در آزمایش سوم اولین لامپ معیوب پیدا میشود؟

سراسری 95: در کیسه ای 5 مهره سفید و 4 مهره سیاه و 3 مهره قرمز موجود است اگر سه مهره از کیسه خارج کنیم با کدام احتمال حداکثر 2 مهره از مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟

مثال: احتمال موفقیت آمیز بودن عمل جراحی برای شخصی $0/8$ است. اگر عمل موفقیت آمیز باشد با احتمال $0/95$ زنده می ماند و اگر عمل موفقیت آمیز نباشد با احتمال $0/2$ زنده می ماند. با کدام احتمال عمل موفقیت آمیز بوده و شخص زنده مانده است؟

مثال: احتمال انتقال یک ویروس به افرادی که واکسن زده اند $0/02$ و احتمال انتقال به افرادی که واکسن نزده اند $0/1$ است. دانش آموزان یک کلاس واکسن زده اند. با کدام احتمال یک دانش آموز واکسن زده ولی بیمار میشود؟

قانون احتمال کل:

اگر فضای نمونه‌ای S به n پیشامد B_1, B_2, \dots, B_n و B_n افراز شده باشد، برای هر پیشامد دلخواه A با توجه به نمودار ون داریم:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \dots + P(A \cap B_n)$$

طبق احتمال شرطی داریم:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \dots + P(B_n)P(A/B_n)$$

مثال: جعبه A شامل 3 مهره سفید و 2 مهره زرد، جعبه B شامل 4 مهره سفید و 5 مهره زرد و جعبه C شامل تعدادی مهره سفید است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب و سپس مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم، احتمال آنکه مهره خارج شده سفید باشد را بیابید؟

مثال: جعبه A دارای 5 مهره سفید و 3 مهره زرد، جعبه B شامل 4 مهره سفید و 6 مهره زرد است. به تصادف 2 مهره از جعبه A و 3 مهره از جعبه B انتخاب کرده و در جعبه C می‌گذاریم و سپس مهره‌ای از جعبه C بیرون می‌آوریم احتمال اینکه این مهره زرد باشد را بیابید؟

مثال: 30 درصد از تولیدات یک شرکت توسط کارخانه A، 35 درصد توسط کارخانه B و بقیه توسط کارخانه C تولید می‌شوند. اگر به ترتیب 2، 3 و 4 درصد تولیدات کارخانه A، B و C معیوب باشند احتمال آنکه به تصادف یک کالا از محصولات شرکت انتخاب کنیم و خراب باشد را بیابید؟

(سراسری 84) دو ظرف داریم در اولی 5 مهره سفید و 4 مهره سیاه و در دومی 7 مهره سفید و 10 مهره سیاه. از ظرف اول یک مهره برداشته و بدون رویت آن در ظرف دوم قرار می‌دهیم. آنگاه از ظرف دوم یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

مثال: کیسه اول حاوی سه مهره سفید و 5 مهره سیاه و کیسه دوم حاوی 4 سفید و 2 مهره سیاه است و کیسه سوم حاوی 5 سیاه و 2 سفید است. از هر یک از کیسه‌ها 3 مهره به کیسه سوم اضافه می‌کنیم سپس یک مهره خارج می‌کنیم احتمال اینکه مهره خارج شده سفید باشد؟

مثال: در ظرف A 7 مهره سفید و 5 مهره سیاه وجود دارد. همینطور در ظرف B 4 مهره سفید و 5 مهره سیاه موجود است. به تصادف 3 مهره از ظرف A انتخاب کرده و بدون نگاه کردن به رنگ آن کنار می‌گذاریم و سپس به تصادف از یکی از ظرف‌ها مهره‌ای انتخاب می‌کنیم احتمال اینکه این مهره سفید باشد را بیابید؟

نکته

اگر مهره‌ای از جعبه خارج کنیم تأثیری در احتمال کلی ندارد اما اگر مهره وارد کنیم احتمال عوض می‌شود.

(سراسری 94): در دو ظرف به ترتیب 24 و 18 مهره یکسان موجود است. در ظرف اول 6 مهره سفید و در ظرف دوم 3 مهره سفید است. از اولی 7 مهره و از دومی 5 مهره به تصادف برداشته و در ظرف دیگری می‌ریزیم. سپس از ظرف آخر یک مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال این مهره سفید است؟

مثال: در یک کارخانه تولید شیر پاستوریزه وقتی خط تولید سالم است، تنها دو درصد از پاکتها کمتر از 297 سی سی شیر دارند ولی وقتی مشکلی در خط تولید بوجود می آید این مقدار به 10 درصد افزایش می یابد. همچنین می دانیم احتمال وجود مشکل در خط تولید 20 درصد است. با چه احتمالی یک پاکت شیری که به تصادف از محصولات کارخانه انتخاب می شود کمتر از 297 سی سی شیر دارد؟

مثال: احتمال اینکه فردی بیماری خاص داشته باشد 2 درصد است. آزمایش تشخیص بیماری برای 97 درصد افراد بیمار مثبت می باشد ولی در 5 درصد نیز نتیجه آزمایش افراد سالم مثبت بوده است. اگر نتیجه آزمایش مثبت بوده باشد احتمال بیمار بودن او کدام است؟

مثال: در یک ایستگاه راه آهن 30 درصد مسافران برای خرید بلیط به گیشه A و 50 درصد به گیشه B و 20 درصد به گیشه C مراجعه میکنند. احتمال اینکه بلیط در گیشه وجود نداشته باشد به ترتیب $\frac{1}{5}$ و $\frac{2}{5}$ و $\frac{2}{5}$ است. اگر مسافری بلیط خریده باشد با کدام احتمال به گیشه C مراجعه کرده است؟

قانون بیز:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) \quad (1)$$

از طرفی داریم:

$$P(A/B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad (2)$$

$$(1), (2) \rightarrow P(B/A) = \frac{P(A/B)P(B)}{P(A)}$$

به این رابطه، رابطه بیز می گویند.

زمانی می توان از رابطه بیز استفاده کرد که $P(A/B)$ به راحتی بدست آید اما احتمال

نکته

$P(B/A)$ راحت بدست نیاید.

مثال: جعبه A شامل 5 مهره سفید و 3 مهره سیاه و جعبه B شامل 4 مهره سفید و 5 مهره سیاه است. جعبه‌ای به تصادف انتخاب کرده و سپس مهره‌ای از آن خارج می‌کنیم. اگر مهره انتخاب شده سیاه باشد احتمال اینکه متعلق به جعبه A باشد را بیابید؟

مثال: می‌دانیم 30٪، 50٪ و 20٪ تولیدات یک شرکت به ترتیب به وسیله 3 کارخانه A، B و C تولید می‌شوند. اگر به ترتیب 4٪، 5٪ و 3٪ تولیدات این سه کارخانه خراب باشد، محصولی به تصادف از محصولات این شرکت انتخاب شده و خراب است. احتمال اینکه متعلق به کارخانه A باشد را بیابید؟

مثال: مردی در جیب خود یک سکه سالم و یک سکه که دو طرفش پشت است نگه می دارد. او یکی از سکه ها را به تصادف انتخاب کرده و آنرا پرتاب میکند. اگر سکه پشت ظاهر شود احتمال آنکه سکه سالم انتخاب شده باشد کدام است؟

مثال: سه کیسه A, B, C داریم A شامل 7 مهره سیاه و 3 مهره سفید، B شامل 5 مهره سیاه و 2 مهره سفید و C حاوی تعدادی مهره سفید است. بر حسب تصادف یک کیسه را انتخاب کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. اگر این مهره سفید باشد احتمال اینکه متعلق به کیسه A باشد را بیابید؟

مثال: A, B, C نسخه خوانهای یک انتشاراتی هستند که به ترتیب 10, 40, 50 درصد از کارهای نسخه خوانی را انجام می دهند. احتمال تصحیح بی غلط هر کدام به ترتیب $0/85, 0/95, 0/99$ است. صفحه ای نسخه خوانی شده ولی غلط دارد. احتمال آنکه مسول خواندن آن صفحه A باشد کدام است؟

